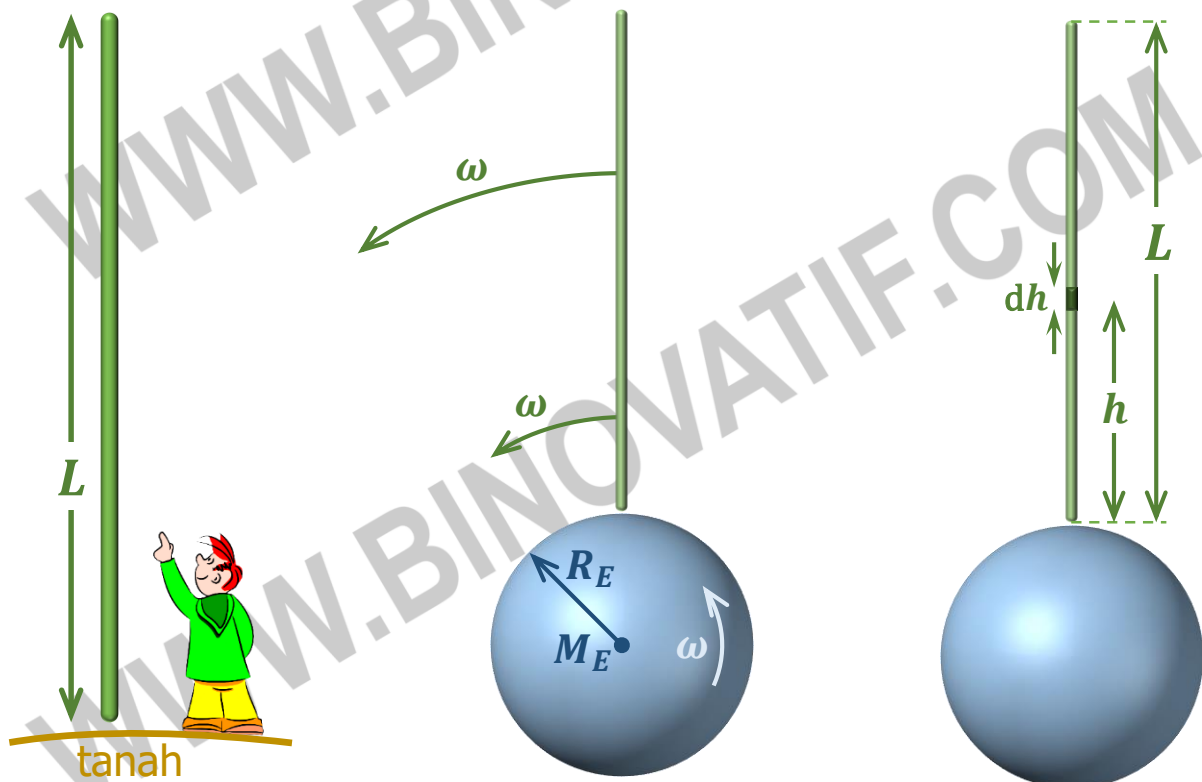


“GANTUNGAN CITA-CITAMU SETINGGI LANGIT”

Anda yang tinggal di kota Pontianak ingin melakukan trik sulap dimana seutas tali homogen bisa berdiri vertikal tanpa ditopang oleh alat apapun. Ujung bawah tali melayang di dekat permukaan tanah. Berapa panjang tali L yang Anda perlukan? (Setelah mendapatkan hasilnya, mungkin Anda akan berpikir trik ini mustahil dilakukan. Tidak apa-apa, bukankah ada pepatah gantungkan cita-citamu setinggi langit. ☺)

Ide mengerjakan soal ini:

- Bagi pengamat di luar Bumi, situasi di atas bisa terjadi jika resultan gaya gravitasi pada tali sama dengan gaya sentripetal yang dibutuhkan supaya tali bisa berputar dengan periode yang sama dengan periode rotasi Bumi, yaitu 24 jam (perhatikan gambar di bawah).
- Bagi pengamat di permukaan Bumi, situasi di atas bisa terjadi jika resultan gaya gravitasi pada tali sama dengan gaya sentrifugal akibat rotasi Bumi.



Definisikan variabel-variabel yang diperlukan untuk mengerjakan soal ini:

- Massa per satuan panjang tali adalah λ (tidak diperlukan di hasil akhir) dan panjang tali adalah L (yang ditanya)
- Jari-jari Bumi $R_E = 6371$ km dan massa Bumi $M_E = 5,972 \times 10^{24}$ kg
- Percepatan gravitasi di permukaan Bumi $g_E = GM_E/R_E^2 = 9,807$ m/s²
- Kecepatan sudut rotasi Bumi terhadap porosnya: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \times 3600) = 7,272 \times 10^{-5}$ rad/s

Sekarang marilah kita mulai mengerjakan soal ini (menurut pengamat di luar Bumi). Perhatikan potongan tali sepanjang dh pada jarak h dari permukaan Bumi. Massa potongan tersebut adalah $dm = \lambda \cdot dh$. Gaya gravitasi yang bekerja pada potongan tersebut adalah $dF_g = GM_E \cdot \lambda \cdot dh / (R_E + h)^2$. Jadi, total gaya gravitasi yang bekerja pada tali adalah:

$$F_g = \int_0^L \frac{GM_E \cdot \lambda \cdot dh}{(R_E + h)^2} = \left[-\frac{GM_E \lambda}{R_E + h} \right]_0^L = GM_E \lambda \left(-\frac{1}{R_E + L} + \frac{1}{R_E} \right) = \frac{GM_E \lambda L}{R_E(R_E + L)}$$

Kemudian, gunakan konsep:

$$\left(\begin{array}{l} \text{resultan gaya eksternal} \\ \text{pada suatu benda} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{massa} \\ \text{benda} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{percepatan} \\ \text{pusat massa} \end{array} \right)$$

Pada soal ini, gaya eksternal yang bekerja pada tali adalah F_g yang telah dihitung di atas. Pusat massa tali mengelilingi Bumi pada jarak $(R_E + L/2)$ dengan kecepatan sudut ω sehingga percepatan pusat massa tali adalah percepatan sentripetal $a_{sp} = \omega^2(R_E + L/2)$. Dari kedua informasi di atas didapatkan:

$$F_g = \lambda L \cdot a_{sp} \Rightarrow \frac{GM_E \lambda L}{R_E(R_E + L)} = \lambda L \omega^2 \left(R_E + \frac{L}{2} \right)$$

$$\frac{GM_E}{\omega^2 R_E} = (R_E + L) \left(R_E + \frac{L}{2} \right) \Rightarrow \frac{2GM_E}{\omega^2 R_E} = (R_E + L)(2R_E + L)$$

$$L^2 + 3R_E L + \left(2R_E^2 - \frac{2GM_E}{\omega^2 R_E} \right) = 0 \Rightarrow L^2 + 3R_E L + 2 \left(R_E^2 - \frac{g_E R_E}{\omega^2} \right) = 0$$

(Untuk mendapatkan ruas kanan persamaan terakhir, ingatlah bahwa $g_E = GM_E/R_E^2$). Selesaikan persamaan kuadrat di atas, akan kita dapatkan panjang tali L yang dibutuhkan:

$$L = \frac{-3R_E \pm \sqrt{R_E^2 + 8g_E R_E / \omega^2}}{2} \approx 22,6R_E \approx 1,442 \times 10^5 \text{ km}$$